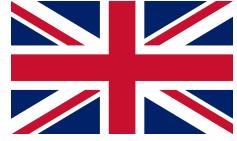




The Golden Digits National Contest  
4th Edition, May 2024



**Problem 1.** Let  $n \geq 2$  be an integer. Prove that for any positive real numbers  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ,

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{i=1}^n 2^i a_i^2 \geq \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j.$$

**Problem 2.** Let  $n$  be a positive integer. Consider an infinite checkered board. A set  $S$  of cells is *connected* if one may get from any cell in  $S$  to any other cell in  $S$  by only traversing edge-adjacent cells in  $S$ . Find the largest integer  $k_n$  with the following property: in any connected set with  $n$  cells, one can find  $k_n$  disjoint pairs of adjacent cells (that is,  $k_n$  disjoint dominoes).

**Problem 3.** Let  $p$  be a prime number and  $\mathcal{A}$  be a finite set of integers, with at least  $p^k$  elements. Denote by  $N_{\text{even}}$  the number of subsets of  $\mathcal{A}$  with even cardinality and sum of elements divisible by  $p^k$ . Define  $N_{\text{odd}}$  similarly. Prove that  $N_{\text{even}} \equiv N_{\text{odd}} \pmod{p}$ .

*Time limit: 4 hours and 30 minutes  
Each problem is worth 7 points*



Concursul Național Cifrele de Aur  
Ediția 4, Mai 2024



**Problema 1.** Fie  $n \geq 2$  un număr natural. Demonstrați că pentru orice numere reale pozitive  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , este satisfăcută inegalitatea

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{i=1}^n 2^i a_i^2 \geq \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j.$$

**Problema 2.** Fie  $n$  un număr natural nenul. Considerăm o tablă de săh infinită. O mulțime  $S$  de celule ale tablei este *conexă* dacă din orice celulă din  $S$  se poate ajunge în orice altă celulă din  $S$  prin traversarea unor celule din  $S$  cu laturi comune.

Aflați cel mai mare număr natural  $k_n$  cu urmatoarea proprietate: în orice mulțime conexă cu  $n$  celule, există  $k_n$  perechi disjuncte de celule adicente (adică,  $k_n$  dominouri disjuncte).

**Problema 3.** Fie  $p$  un număr prim și  $\mathcal{A}$  o mulțime finită cu cel puțin  $p^k$  elemente. Notăm cu  $N_{\text{par}}$  numărul submulțimilor lui  $\mathcal{A}$  cu cardinalitate pară și suma elementelor divisibilă cu  $p^k$ . Definim  $N_{\text{impar}}$  în mod analog. Demonstrați că  $N_{\text{par}} \equiv N_{\text{impar}} \pmod{p}$ .