Problem 1. Let $n > 1$ be a composite integer and $d_1 < \cdots < d_m$ be all its positive divisors. Is it possible for $d_i + d_{i+1}$ to be a perfect k-th power, $k \geqslant 2$ being fixed, for every $1 \leqslant i < m$?

Problem 2. We are given an infinite set of points in the plane such that any two of them have a distance of at most one. Prove that all the axes of symmetry of this set are concurrent, provided that there are at least two of them.

Note: An axis of symmetry of a set of points in the plane is a line ℓ with the property that the reflection of any point in the set with respect to ℓ is also in the set.

Problem 3. On the surface of a sphere, a non-intersecting closed curve comprised of finitely many circle arcs is drawn. It divides the surface of the sphere in two regions, coloured red and blue. Prove that there exist two antipodes of different colours (the curve is colourless).

Time limit: 4 hours and 30 minutes
Each problem is worth 7 points

Problema 1. Fie $n > 1$ un număr natural compus şi $d_1 < \cdots < d_m$ divizorii săi pozitivi. Este posibil ca $d_i + d_{i+1}$ să fie o putere perfectă de ordin k, cu $k \geqslant 2$ fixat, pentru fiecare $1 \leqslant i < m$?

Problema 2. Considerăm o mulţime infinită de puncte în plan, oricare două având distanţa cel mult unu. Arătaţi că toate axele de simetrie ale acestei mulţimi sunt concurente, presupunând că există măcar două.

Notă: O axă de simetrie a unei mulţimi de puncte în plan este o dreaptă ℓ cu proprietatea că reflexia oricărui punct din mulţime faţă de ℓ este tot în mulţime.

Problema 3. Pe suprafaţa unei sfere este desenată o curbă închisă care nu se intersectează, formată dintr-un număr finit de arce de cerc. Aceasta divide suprafaţa sferei în două regiuni, colorate cu albastru şi roşu. Demonstraţi că există două puncte diametral opuse, care au culori diferite (curba este incoloră).

Timp limită: 4 ore şi 30 de minute
Fiecare problemă valorează 7 puncte