Problem 1. Let $n \geqslant 2$ be an integer. Prove that for any positive real numbers $a_1, a_2, \ldots, a_n$,

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{i=1}^{n} 2^i a_i^2 \geqslant \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_i a_j.$$

Problem 2. Let n be a positive integer. Consider an infinite checkered board. A set S of cells is *connected* if one may get from any cell in S to any other cell in S by only traversing edge-adjacent cells in S. Find the largest integer k_n with the following property: in any connected set with n cells, one can find k_n disjoint pairs of adjacent cells (that is, k_n disjoint dominoes).

Problem 3. Let p be a prime number and $\mathcal{A}$ be a finite set of integers, with at least p^k elements. Denote by N_{even} the number of subsets of $\mathcal{A}$ with even cardinality and sum of elements divisible by p^k. Define N_{odd} similarly. Prove that $N_{\text{even}} \equiv N_{\text{odd}} \bmod p$.

Time limit: 4 hours and 30 minutes
Each problem is worth 7 points

Concursul Naţional Cifrele de Aur
Ediţia 4, Mai 2024

Problema 1. Fie $n \geqslant 2$ un număr natural. Demonstraţi că pentru orice numere reale pozitive $a_1, a_2, \ldots, a_n$, este satisfăcută inegalitatea

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{i=1}^{n} 2^i a_i^2 \geqslant \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_i a_j.$$

Problema 2. Fie n un număr natural nenul. Considerăm o tablă de şah infinită. O mulţime S de celule ale tablei este *conexă* dacă din orice celulă din S se poate ajunge în orice altă celulă din S prin traversarea unor celule din S cu laturi comune.

Aflaţi cel mai mare număr natural k_n cu urmatoarea proprietate: în orice mulţime conexă cu n celule, există k_n perechi disjuncte de celule adicente (adică, k_n dominouri disjuncte).

Problema 3. Fie p un număr prim şi $\mathcal{A}$ o mulţime finită cu cel puţin p^k elemente. Notăm cu N_{par} numărul submulţimilor lui $\mathcal{A}$ cu cardinalitate pară şi suma elementelor divisibilă cu p^k. Definim N_{impar} în mod analog. Demonstraţi că $N_{\text{par}} \equiv N_{\text{impar}} \bmod p$.

Timp limită: 4 ore şi 30 de minute
Fiecare problemă valorează 7 puncte